Commutateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Prérequis. *Algèbre linéaire et matrices, déterminants.*

Définitions et notations.

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ est un corps infini, n un élément de $\mathbb{N}^*$.
- On pose $\mathcal{E}_n(\mathbb{K}) = \{ABA^{-1}B^{-1},\ (A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2\}$.

Introduction. *Le but du problème est de démontrer que $\mathcal{E}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.*

PARTIE I. *Préliminaires.*

Cette partie regroupe trois questions indépendantes utiles dans la suite. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, et un endomorphisme f de E.

1. On suppose que $n \geqslant 2$, et que f n'est pas une homothétie.
   a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ soit libre.
   b) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a pour première colonne
$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   c) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_n$, montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que PMP^{-1} ait pour première colonne C.
2. Ici, $n \geqslant 2$ et $f \in \mathrm{GL}(E)$. On suppose que E est somme directe d'une droite D et d'un sous-espace H. Soit $p : E \to H$ la projection de E sur H parallèlement à D.
   a) Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(p \circ f))$.
   b) Soit $g = p \circ f_{|H}$. C'est un élément de $\mathcal{L}(H)$. Vérifier que $\mathrm{rg}(g) \geqslant n-2$.
   c) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ que l'on décompose par blocs :
$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}n-1 \\ \}1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-1} & \underbrace{\quad}_{1} \end{array} & \end{array}$$
   Etablir que $\mathrm{rg}(A_{11}) \geqslant n-2$.
   d) *Les notations sont celles de la question précédente. Donner un exemple de matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $rg(A_{11}) = n-1$, puis un exemple pour lequel $rg(A_{11}) = n-2$*
3. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose
$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
   a) On suppose que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des valeurs propres de f. Soit, pour $i \in [\![1,n]\!]$, e_i un vecteur propre de f associé à α_i, c'est-à-dire tel que $f(e_i) = \alpha_i e_i$ et $e_i \neq 0$. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E (on pourra appliquer plusieurs fois f à une relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et combiner judicieusement les relations ainsi obtenues). Quelle est la matrice de f dans cette base?
   b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Montrer que M est semblable à Δ (on pourra appliquer la question 3.a) à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M).

PARTIE II. *La factorisation LU.*

1. Soient $n \geqslant 2$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, ainsi que
$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array} \quad \text{et} \quad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$
   On pose ensuite $C = AB$ et $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(C_{11})$ en fonction de $\det(A_{11})$ et $\det(B_{11})$.

On note $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) à termes diagonaux égaux à 1 (resp. non nuls).

2. a) Vérifier que $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   b) Déterminer $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $M = LU = L'U'$, où L, L' sont dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$, et U, U' dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Prouver que $L = L'$ et $U = U'$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $M = LU$, où $L \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$, $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. On écrit :
$$U = \begin{pmatrix} u_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
   Calculer les mineurs principaux de M en fonction des u_i.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (*i*) Il existe un couple (L, U) de $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = LU$.
   (*ii*) Tous les mineurs principaux de M sont non nuls.
6. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ dans $(\mathbb{K}^*)^n$. Si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ a tous ses mineurs principaux égaux à 1, montrer que l'on peut écrire $M = AB$, où A et B sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

PARTIE III. *Conjugaison de $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ à une matrice dont tous les mineurs principaux valent 1.*

1. Si $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$, on pose

$$P_U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_{n-1} & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}n-1 \\ \}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{n-1} & \underbrace{\quad}_{1} \end{matrix} & \end{array}$$

Vérifier que P_U est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Calculer P_U^{-1}.

2. a) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ de première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$.
   b) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_2$. Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$.
3. On suppose $n \geqslant 3$. Soient $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, et $M' = P_U M P_U^{-1}$, où U est dans $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. On suppose que la première colonne de M est

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'on pose

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}n-1 \\ \}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{n-1} & \underbrace{\quad}_{1} \end{matrix} & \end{array}, \quad M' = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}n-1 \\ \}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{n-1} & \underbrace{\quad}_{1} \end{matrix} & \end{array}$$

Démontrer que l'on peut choisir U de sorte que l'on ait

$$M'_{11} \in \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_n.$$

4. Montrer que toute matrice $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_n$ est semblable à une matrice dont tous les mineurs principaux valent 1.

PARTIE IV. *Les commutateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

1. a) Vérifier $\mathcal{E}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
   b) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si on peut trouver R et S dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :
   - $M = RS$
   - S est semblable à R^{-1}.
2. a) En utilisant III.4, II.6, et I.3, montrer $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_n \subset \mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.
   b) Démontrer finalement que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.
3. Soient A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En utilisant la question 2, montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (*i*) Il existe X_1, X_2, X_3 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que l'on ait $A = X_1X_2X_3$ et $B = X_2X_1X_3$.
   (*ii*) Les déterminants de A et de B sont égaux.

Commutateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

PARTIE I. *Préliminaires.*

1. a) Démontrons la contraposée. Supposons $(x, f(x))$ liée pour tout $x \in E$ et choisissons une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Pour chaque k, la famille $(e_k, f(e_k))$ est liée. Comme $e_k \neq 0$, cela revient à dire qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_k) = \lambda_k e_k$. On a alors

$$f(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

Or il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) = \lambda(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$. On a, par unicité de l'écriture dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda.$$

et f est l'homothétie de rapport λ.

b) La question précédente permet de trouver x tel que $(x, f(x))$ soit une famille libre. Le théorème de la base incomplète permet d'obtenir une base de E de la forme

$$e_1 = x, e_2, \dots, e_n = f(x).$$

On a alors $f(e_1) = e_n$ et la matrice de f dans cette base est de la forme voulue.

c) L'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M n'est pas une homothétie ; on peut donc lui appliquer le résultat de la question b). La matrice M' de f dans cette nouvelle base a pour première colonne C et est semblable à M.

2. a) On a $\mathrm{Ker}(p \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}\, p)$. Puisque f et f^{-1} sont des automorphismes de E et que $\mathrm{Ker}(p) = D$, on a

$$\dim \mathrm{Ker}(p \circ f) = \dim(\mathrm{Ker}\, p) = 1.$$

b) On a $\mathrm{Ker}\, g = H \cap \mathrm{Ker}(p \circ f) \subset \mathrm{Ker}(p \circ f)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(g)) \leqslant 1$. Comme $\dim(H) = n - 1$, le théorème du rang appliqué à g montre que $\mathrm{rg}(g) \geqslant n - 2$.

c) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et posons $D = \mathbb{K}e_n$, $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, p la projection de $\mathbb{K}^n$ sur H parallèlement à D, et enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Alors

$$Mat_{(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})} p \circ f|_H = A_{11}.$$

La question précédente s'applique et l'on a $\mathrm{rg}(A_{11}) \geqslant n - 2$.

d) Voici un exemple pour lequel $\mathrm{rg}(A_{11}) = n - 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Et un exemple avec $\mathrm{rg}(A_{11}) = n - 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & I_{n-2} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Puisque $\dim E = n$, il suffit, pour montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, de vérifier que cette famille est libre. Considérons donc $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Appliquons f^k à cette relation ($k \in \mathbb{N}$). On obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^k e_i = 0$. En combinant ces relations, il vient, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i) e_i = 0$.

Fixons alors $i \in [\![1, n]\!]$, et choisissons P dans $\mathbb{K}[X]$ pour que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on ait

$$P(\alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{(par exemple } P = \prod_{j \neq i} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \text{ convient).}$$

Il vient $\lambda_i e_i = 0$ puis $\lambda_i = 0$. C'est le résultat désiré. La matrice de f dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est évidemment Δ.

b) Il suffit de montrer que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M, pour conclure avec la question précédente. Or, λ est valeur propre de cet endomorphisme si et seulement si $M - \lambda I_n$ est non-inversible. Pour qu'une matrice triangulaire ne soit pas inversible, il faut et il suffit qu'un de ses termes diagonaux soit nul. La non-inversibilité de $M - \lambda I_n$ équivaut donc bien à $\lambda \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

PARTIE II. *La factorisation LU.*

1. Il est clair que $C_{11} = A_{11} B_{11}$ d'où $\det C_{11} = \det A_{11} \det B_{11}$.

2. a) • Les éléments de $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices triangulaires à éléments diagonaux non nuls, et donc sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
• Les ensembles $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ contiennent I_n.
• Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont les produits des termes diagonaux correspondants. Il en résulte que $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ sont stables pour le produit.

- Enfin, si $M \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$), M^{-1} est triangulaire inférieure (resp. supérieure), ses termes diagonaux étant les inverses de ceux de M. Donc on a $M^{-1} \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$).
On a démontré que $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

b) Si $M \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, M est triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux valent 1. Donc $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ est égal à $\{I_n\}$.

3. Si $LU = L'U'$, alors $UU'^{-1} = L^{-1}L'$. Or, d'après a), $UU'^{-1} \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ et $L^{-1}L' \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$. Donc $UU'^{-1} = L^{-1}L' \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{U}_n(\mathbb{K}) = \{I_n\}$ et $L = L'$, $U = U'$.

4. Pour calculer le k-ième mineur principal de M, écrivons

$$L = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{n-k} & \end{array}, \qquad U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{n-k} & \end{array}.$$

Alors $M = LU = \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{pmatrix}$, et le k-ième mineur principal de M est $\det(L_{11}U_{11}) = \prod_{i=1}^{k} u_i$.

5. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ découle directement de la question 3. La réciproque se démontre par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident. Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$ ($n \geqslant 2$), et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à mineurs principaux non nuls. Ecrivons

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}n-1 \\ \}1 \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{n-1}\ \underbrace{\quad}_{1} & \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, M_{11} peut s'écrire $L'U'$, où $L' \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $U' \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{K})$. Posons

$$L = \begin{pmatrix} L' & 0 \\ M_{21}U'^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} U' & L'^{-1}M_{12} \\ 0 & M_{22} - M_{21}U'^{-1}L'^{-1}M_{12} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $L \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$, que U est triangulaire supérieure, et que l'on a $M = LU$. D'autre part, puisque $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il en est de même de U, et donc les termes diagonaux de U sont non nuls, ce qui montre que $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.

6. On écrit $M = LU$ avec $L \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Les termes diagonaux de L sont égaux à 1. Grâce à la question 4, il en est de même de ceux de U.

En posant $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$, *on a* $M = (L\Delta)(\Delta^{-1}U)$ *et le résultat* suit.

PARTIE III. *Conjugaison de* $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *à une matrice dont tous les mineurs principaux valent* 1.

1. On vérifie aussitôt que $P_U P_{-U} = I_n$. L'inverse de P_U est donc P_{-U}.

2. a) Ecrivons $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ (car $\det(M) = 1$). Si $T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, T_λ est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$, et
$$T_\lambda^{-1}MT_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & -\lambda^2 - a\lambda - 1 \\ 1 & \lambda + a \end{pmatrix}.$$
Il suffit de choisir $\lambda = -1$ pour conclure.

b) D'après I.1.c), M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il reste à appliquer la question précédente en utilisant le caractère transitif de la relation de similitude des matrices.

3. On calcule $M'_{11} = M_{11} + UM_{21}$. Notons $C_1 = 0, C_2, \ldots, C_{n-1}$ les colonnes de M_{11} et posons $M_{21} = (1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Si e est la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$,
$$\begin{aligned} \det(M'_{11}) &= \det_e(U, C_2 + x_2U, \ldots, C_{n-1} + x_{n-1}U) \\ &= \det_e(U, C_2, \ldots, C_{n-1}) \end{aligned}$$
D'après I.2.d), $\mathrm{rg}(M_{11}) \geqslant n-2$. Comme $C_1 = 0$, ceci implique que $C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. On peut donc trouver un vecteur colonne U' tel que $\det_e(U', C_2, \ldots, C_{n-1}) = 1$. Reste à voir que l'on peut trouver $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ dans K tels que, si on pose $U = U' + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i C_i$, la première colonne U de M'_{11} ne soit pas dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des vecteurs colonnes de la forme
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{K}.$$
Il en résultera que M'_{11} n'est pas dans $\mathbb{K}I_n$ tout en étant dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Si un tel $(n-2)$-uplet n'existait pas, toute colonne $U' + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i C_i$ serait dans $\mathcal{V}$. En faisant des soustractions, chaque C_i serait dans $\mathcal{V}$. Comme $\dim(\mathcal{V}) = 1$, ceci imposerait $n-2 = 1$, et $n = 3$. Mais alors, C_2 et U' seraient dans $\mathcal{V}$, donc liés, ce qui contredit $\det_e(U', C_2, \ldots, C_{n-1}) = 1$.

…aisonne par récurrence sur n. Le cas $n=2$ a été traité en 2. Supposons …résultat vrai à l'ordre $(n-1)$, avec $n \geqslant 3$. Soit M_1 dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \setminus KI_n$. D'après I.1.c), M_1 est semblable à $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_n$ de première colonne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La question 3 montre que M est semblable à une matrice M' telle que $M'_{11} \in \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence dit qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}M'_{11}P$ ait tous ses mineurs principaux égaux à 1. Soit $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice Q est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et son inverse est $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$Q^{-1}M'Q = \begin{pmatrix} P^{-1}M'_{11}P & P^{-1}M'_{12} \\ M'_{21}P & M'_{22} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $Q^{-1}M'Q$ a tous ses mineurs principaux égaux à 1. Mais $Q^{-1}M'Q$ est semblable à M', donc à M, donc à M_1.

PARTIE IV. *Les commutateurs de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. a) C'est évident car, si $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$,

$$\det(ABA^{-1}B^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(A)^{-1}\det(B)^{-1} = 1.$$

b) Si $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{K})$, M s'écrit $ABA^{-1}B^{-1}$, où A, B sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $R = A$, $S = BA^{-1}B^{-1}$, et le résultat suit.
Inversement, si $M = RS$ où R et S sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et R^{-1} semblable à S, on peut écrire $S = TR^{-1}T^{-1}$ où $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $M = RTR^{-1}T^{-1} \in \mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.

2. a) D'après III.4, M est semblable à M' dont tous les mineurs principaux valent 1 : $M = PM'P^{-1}$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Choisissons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{K}^*$ deux à deux distincts, ce qui est possible puisque $\mathbb{K}$ est infini. La question III.6 permet d'écrire $M' = AB$ où A et B sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

La question I.3.b) montre que A et B^{-1} sont toutes deux semblables à la matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

donc sont semblables. Finalement on a $M = PAP^{-1}PBP^{-1}$ et les matrices $PAP^{-1} = R$, $PBP^{-1} = S$ sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, avec S semblable à R^{-1}. La question IV.1.b) montre alors $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.

b) Il reste à voir que si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est une homothétie, alors M est dans $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$. Ecrivons donc $M = \alpha I_n$, avec $\alpha^n = 1$. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha^{n-1} & & & \\ & & \alpha^{n-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha^{n-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que R et S sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, que R et S^{-1} sont semblables (il s'agit de matrices diagonales ayant mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités puisque $1/\alpha^k = \alpha^{n-k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$).

3. ◦ $(i) \Rightarrow (ii)$: si $A = X_1X_2X_3$ et $B = X_2X_1X_3$ alors

$$\det(A) = \det(B) = \det(X_1)\det(X_2)\det(X_3).$$

◦ $(ii) \Rightarrow (i)$: inversement, supposons $\det(A) = \det(B)$. La question IV.2 montre que AB^{-1} s'écrit $XYX^{-1}Y^{-1}$ où X et Y sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Posons $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = X^{-1}Y^{-1}B$. On a alors

$$\begin{cases} X_2X_1X_3 = B \\ X_1X_2X_3 = XYX^{-1}Y^{-1}B = AB^{-1}B = A \end{cases}$$

Commentaires. *Le résultat de la partie II (factorisation LU) est utilisé en analyse numérique matricielle. Le lecteur pourra consulter le livre de P.G. Ciarlet, "Analyse numérique matricielle et optimisation" (Masson), pour des précisions. La factorisation LU peut être vue comme cas particulier du théorème de décomposition de Bruhat. Pour énoncer ce dernier, notons si* $\sigma \in S_n$, P_σ *la matrice de permutation* $(p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *définie par* $p_{ij} = 0$ *si* $j \neq \sigma(i)$ *et* $p_{ij} = 1$ *si* $j = \sigma(i)$, *et désignons par* E_σ *l'ensemble des matrices de la forme* $LP_\sigma U$ *où* $L \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ *et* $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. *On a le :*

Théorème. *Les* E_σ *pour* $\sigma \in S_n$ *forment une partition de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On peut ainsi réinterpréter la factorisation LU comme la description de l'ensemble E_{id} ; *pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *le théorème de factorisation LU montre ainsi que* E_{id} *est ouvert et dense dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *(donc dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*), ce qui justifie la dénomination "grosse cellule" traditionnellement donnée à* E_{id}. *La* preuve de la décomposition de Bruhat est un excellent exercice pour le lecteur, qui pourra par exemple utiliser judicieusement les opérations élémentaires. On trouvera une correction détaillée dans S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, "*Exercices de Mathématiques, Oraux X-ENS*", Cassini, 2001 exercices 6.3 et 7.16.

Le théorème prouvé dans ce problème est l'analogue d'un résultat "additif" plus connu, qui fournit, si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'équivalence entre

(i) $\operatorname{Tr} M = 0$,

(ii) *il existe* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $M = AB - BA$.

Seule l'implication (i) $\Longleftarrow$ (ii) mérite une preuve. L'argument le plus classique consiste à montrer que si $\operatorname{Tr} M = 0$, M est semblable à une matrice N à diagonale nulle. On observe alors, si D est une matrice diagonale à termes diagonaux deux à deux distincts, qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $N = CD - DC$ (c'est un calcul facile). En combinant ces deux points, on montre aisément le résultat. Pour l'analogue multiplicatif établi dans ce problème, on a suivi une démarche similaire, en montrant que si $\det M = 1$, M est semblable à une matrice dont tous les mineurs principaux valent 1, puis en montrant qu'une telle matrice est de la forme $CDC^{-1}D^{-1}$. Les deux résultats sont dus à K. Shoda (1936). Dans le livre de R.A. Horn et C.R. Johnson, "Topics in Matrix Analysis" (Cambridge University Press), on trouvera des énoncés plus généraux et beaucoup de renseignements complémentaires.

Si G est un groupe, les éléments de G de la forme $aba^{-1}b^{-1}$ sont appelés les commutateurs de G. En dehors du cas très particulier où $n = 2$ et $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on montre classiquement que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ engendré par les commutateurs est $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Le résultat du problème est plus précis, puisqu'il établit que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un commutateur.

$M \quad \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ B & A \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \boxed{A+B} & \boxed{2A} \\ B & \boxed{A+B} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A-B & (A+B) \\ B & A \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A-B & -(A+B) \\ A & -B \end{pmatrix}$